UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

PIMES - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
Disciplina: MATEMÁTICA I
1^o **Semestre de 2001.**

Exemplos de Sistemas Lineares [1]

PROF. ALEXANDRE STAMFORD

1. **Modelo de Input-Output de Leontief**

O modelo que será apresentado foi primeiramente usado pelo economista Wassily W. Leontief no seu paper *Qualitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States* no *Review of Economic Statistics* 18(1936):105-125. Um texto revisado do mesmo modelo foi publicado pelo autor em seu livro *Input-Output Analysis*(New York: Oxford University Press, 1966). Leontief recebeu o prêmio nobel por seu trabalho em 1973.

Suponha um sistema econômico com n indústrias. Existem dois tipos de demanda em cada indústria. As demandas externas ao sistema (se o sistema é um país então as demandas externas são as demandas de outros países) e as demandas locais (de outras indústrias) do mesmo sistema.

Seja e_i a demanda externa pelos produtos da indústria i. Seja a_{ij} a representação da demanda interna da indústria j por produtos da indústria i para produzir uma unidade de seu produto. Seja x_i a produção total da indústria i. Suponha que a produção de cada indústria é igual a sua demanda, ou seja, não há superprodução. O total demandado é igual a soma das demandas internas e externa. Para calcular a demanda interna da indústria 2, por exemplo, procede-se da seguinte forma: a indústria 1 precisa de a_{21} unidades de produto da indústria 2 para produzir uma unidade do seu produto. Se o produto da indústria 1 é x_1, então $a_{21}x_1$ é o montante total da industria 1 necessário à indústria 2. Assim, a demanda interna total na indústria 2 é $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n$.

Desta forma pode-se montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & e_1 & = & x_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & e_2 & = & x_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & + & e_n & = & x_n
\end{array} \tag{1}$$

Reescrevendo (1) resulta em:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1-a_{11})x_1 & - & a_{12}x_2 & - & a_{13}x_3 & - & \ldots & - & a_{1n}x_n & = & e_1 \\
-a_{21}x_1 & + & (1-a_{22})x_2 & - & a_{23}x_3 & - & \ldots & - & a_{2n}x_n & = & e_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
-a_{n1}x_1 & - & a_{n2}x_2 & - & a_{n3}x_3 & - & \ldots & + & (1-a_{nn}x_n) & = & e_n
\end{array} \tag{2}$$

O sistema (2) é muito importante em análise econômica.

[1] Exemplos extraídos de *Multivariable Calculus, Linear Algebra and Differential Equations*, Grossman(1995), página 385.

2. **O Modelo de Leontief aplicado a um sistema com três indústrias**

Suponha que as demandas externas em um sistema econômico com três indústrias são respectivamente 10, 25 e 20. Suponha que para fabricar uma unidade de seu produto a indústria 1 utilize 0,2 do seu próprio produto, 0,5 do produto da indústria 2 e 0,15 do produto da indústria 3; a indústria 2 utilize 0,1 do seu próprio produto, 0,4 do produto da indústria 1 e 0,3 do produto da indústria 3; a indústria 3 utilize 0,2 do seu próprio produto, 0,5 do produto da indústria 2 e 0,25 do produto da indústria 1. Ache a produção em cada indústria tal que a oferta seja exatamente igual a demanda.

Solução:

Aqui $n = 3$ e $(1 - a_{11}) = 0,8; a_{12} = 0,5; a_{13} = 0,15; e_1 = 10; a_{21} = 0,4; (1 - a_{22}) = 0,9; a_{23} = 0,3; e_2 = 25; a_{31} = 0,25; a_{32} = 0,5; (1 - a_{33} = 0,85;$ e $; e_3 = 20.$ Então o sistema 2 é:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 0,80x_1 & - & 0,5x_2 & - & 0,15x_3 & = & 10 \\ -0,40x_1 & + & 0,9x_2 & - & 0,30x_3 & = & 25 \\ -0,25x_1 & - & 0,5x_2 & + & 0,85x_3 & = & 20 \end{array} \qquad (3)$$

Resolvendo o sistema (3) encontra-se as produções das indústrias: $x_1 = 100,30$; $x_2 = 118,74$; $x_3 = 125,82$.

3. **Um problema de gerenciamento de recursos**

Uma empresa de Jogos e Pescaria fornece três tipos de alimento a um lago que contém três espécies de peixes. Cada peixe da espécie 1 consome semanalmente, uma média de 1 unidade do Alimento 1, 1 unidade do Alimento 2 e 2 unidades do Alimento 3. Os peixes da espécie 2 consomem semanalmente, uma média de 3 unidades do Alimento 1, 4 unidades do Alimento 2 e 5 unidades do Alimento 3. Já os peixe da espécie 3 consome toda semana uma média de 2 unidades do Alimento 1, 1 unidade do Alimento 2 e 5 unidades do Alimento 3. Toda semana 25.000 unidades do alimento 1, 20.000 unidades do alimento 2 e 55.000 unidades do alimento 3 são fornecidas ao lago. Se for assumido que toda alimentação é consumida, quantos peixes de cada espécie podem coexistirem no lago?

Solução:

A disponibilidade de cada um dos alimentos deve ser igual ao seu consumo total. Desta forma, para o alimento 1, por exemplo, tem-se que a quantidade consumida por cada peixe da espécie 1 vezes a quantidades de peixes da espécie 1 dá o total de alimento 1 consumido pela espécie de peixe 1, assim como a quantidade consumida por cada peixe da espécie 2 vezes a quantidades de peixes da espécie 2 dá o total de alimento 1 consumido pela espécie de peixe 2 e a quantidade consumida por cada peixe da espécie 3 vezes a quantidades de peixes da espécie 3 dá o total de alimento 1 consumido pela espécie de peixe 3. A soma desses consumos deve ser igual ao fornecimento total de alimento do tipo 1 ao lago ou seja, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25.000$ onde x_1, x_2 e x_3 representam as quantidades de cada espécie presentes no lago. Analogamente pode-se constrir as outra equações o que resultará no sistema (4).

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 25.000 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 20.000 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 55.000 \end{array} \qquad (4)$$

O sistema é indeterminado tendo infinitas soluções. Supondo que x_3 seja escolhido aleatoriamente tem-se a solução:

$$(40.000 - 5x_3, \quad x_3 - 5.000, x_3)$$

Esta é a solução matemática. Como a matemática foi inserida num determinado contexto, é necessário, após a resolução inserir as particularidades de tal inserção.

No caso, as quantidades de peixe de cada espécie devem ser positivas. Isto implica que $(40.000 - 5x_3 \geq 0$ e que $x_3 - 5.000 \geq 0$, ou seja, $5.000 \leq x_3 \leq 8.000$. Isso significa que as populações viáveis para o lago que consomem toda comida fornecida são:

$$\begin{array}{l} x_1 = 40.000 - 5x_3 \\ x_2 = x_3 - 5.000 \\ 5.000 \leq x_3 \leq 8.000 \end{array} \tag{5}$$

Por exemplo, se $x_3 = 6.000$ então $x_1 = 10.000$ e $x_2 = 1.000$.

Como também não pode haver população fracionária então a quantidade de populações suportada pelo lago é finita, ou seja, o sistema que tem infinitas soluções matematicamente, tem um número finito de soluções no contexto fornecido.